S E S ‘ 2 0 0 5

Scientific Conference “SPACE, ECOLOGY, SAFETY” with International Participation

10–13 June 2005, Varna, Bulgaria

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ВОДЫ И МИНЕРАЛЬНЫХ СОЛЕЙ В КОРЕННОМ МОДУЛЕ КОСМИЧЕСКОЙ ОРАНЖЕРЕИ[1]

Славчо Славчев, Георги Симеонов, Пенка Калицова-Куртева

Институт механики, Болгарская Академия Наук
ул. Акад. Г. Бончева, бл. 4, София 1113, Болгария

Keywords: space greenhouse, root module, water transport, nutrients extraction and transport

Abstract

Mathematical modelling is a useful tool for designing root modules and control of transport processes in space greenhouses. Particulate media are currently used as substrate in the root modules. Such porous media conduct water, air and nutrients to the plant roots. Phenomenological models of the water fluxes in porous media are discussed. The water imbibition in porous media is modelled by an axisymmetric capillary flow in Hele-Shaw cell. Two diffusion models of extraction of the nutrients from the particle pores are developed. Formulas for the nutrient fluxes extracted are obtained. They are used in another model regarding the root module as a system of lumped parameters. The models developed allow simulating regimes of water and nutrients supply in the root module of space greenhouses.

1. Проблемы моделирования процессов переноса в коренном модуле

В вариантах космических оранжерей, развиваемых в настоящее время [1-3], коренной модуль имеет три основные функции:

- служить механической основой, к которой закрепляются корни растений и быть средой их развития;
- поставлять воды и воздуха, необходимых для протекания вегетации (полив и аэрирование);
- содержать заранее складированные минеральные соли, необходимые растениям и при поливе отдавать их корням (минеральное питание).

В специфических условиях невесомости на космическом аппарате, искусственные почвы (так называемые *субстраты*) предпочитаются перед естественными. Субстраты представляют собой сыпучие среды, составленные из тонко-пористых минеральных гранул узкого фракционного состава [1,2].

В невесомости движение воды в поровом пространстве между гранулами среды осуществляется за счет капиллярных сил, которые действуют на межфазной границе между жидкостью и воздухом. Движение жидкости в каналах с переменным по длине сечением происходит в направлении суживания каналов. В сложной геометрии порового пространства субстрата конфигурация каналов между частицами имеет случайный характер. Поэтому вытеснение одной жидкости или газа другой жидкостью часто исследуется на основе перколяционной теории [4,5]. Независимо от случайного характера среды, в многих случаях реализуемые течения имеют вполне детерминированные эффективные (средние) характеристики, которые

[1] Работа финансирована Министерством Образования и Науки, Болгария (дог. КИ-1-02/03).

определяют переносные свойства среды как целое. Таким образом, среду можно рассматривать как сплошную. Оценка эффективных свойств такой среды делается на основе соответствующих моделей ее структурных элементов. При этом применяются две основные модели – капиллярная и глобулярная [6]. В первой модели структурная единица среды - капилляр, а во второй - отдельная частица.

Благодаря структуре порового пространства гранул, они имеют огромную внутреннюю поверхность. Это дает возможность на стенках их пор заранее "складировать" в виде тонкого твердого слоя (фильма) соответствующие минеральные соли. Альтернативным является случай, когда твердые соли заполняют существенную часть доступного порового пространства. При поступлении воды в поры, рассматриваемые вещества (целевые компоненты) растворяются и образуют высоко-концентрированный раствор. Как правило, изучаемый процесс растворения имеет равновесный характер. По этой причине концентрации целевых компонентов в зоне растворения есть концентрации насыщения растворителя (воды) при соответствующей температуре [7-9] .

Предметом настоящего доклада является математическое моделирование процессов капиллярной пропитки пористой среды и извлечения минеральных солей из гранул и их транспорта к корневой системе растений.

2. Моделирование капиллярной пропитки субстрата [10]

В экспериментах по выращиванию растений, проведенных на космической оранжереи "Свет", подача воды в субстрат осуществлялась при помощи фитилей смоченных водой [1]. Они располагались между корнями растений параллельно дну коренного модуля. Вода, поступающая через любой фитиль, распространяется радиально от него и заполняет объем приблизительно цилиндрической формы. Перемещение фронта движения зависит от капиллярных свойств жидкости и от внешнего перепада давления (если он существует).

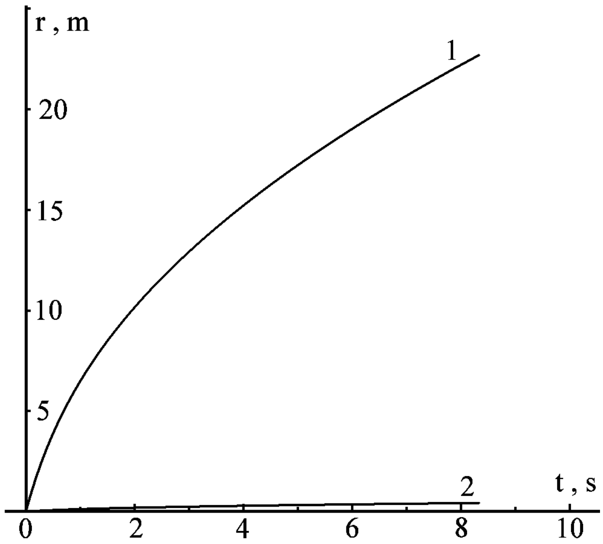
Капиллярная пропитка пористой среды часто моделируется движением жидкости в так называемой *ячейке Хеле-Шоу*. Ячейка представляет собой две твердые пластины, расположенные параллельно на очень близком расстоянии друг от друга. В узком зазоре между ними осуществляется одномерное течение одной жидкой фазы, вытесняющей другую. В литературе в основном исследовалось плоское течение в такой ячейке.

В рассматриваемом нами случае изучается осесимметричное течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу. На основе закона сохранения импульса заданного объема жидкости получено обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, определяющее положение фронта распространения воды (r - радиус цилиндрической области, занимаемой водой) в функции времени t:

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+Qr\frac{dr}{dt}=R(t),\qquad Q=\frac{6\mu}{\rho h^2},\quad R(t)=\frac{2}{\rho}\left(P(t)+\frac{\sigma\cos\theta}{h}\right). \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения зависят от полуширины канала h, закона изменения перепада давления $P(t)$ и физических свойств жидкости: плотности ρ, динамической вязкости μ, поверхностного натяжения σ и угла смачивания θ. Для воды ($\nu=\mu/\rho=10^{-6}\,м^2\,сек^{-1}$, $\sigma=72\,.10^{-3}\,Н\,м^{-1}$) при $h=10^{-3}\,м$ (ширина канала - $2\,мм$) константа $Q=6\,сек^{-1}$. При внешнем перепаде давления, $R(t)$ зависит преимущественно от него, так как капиллярное давление пренебрежимо по сравнению с ним. При постоянном давлении, равном одной технической атмосфере ($1\,атм\approx10^5\,Па$), коэффициент $R\approx200\,м^2сек^{-2}$. При отсутствии внешнего перепада давления, этот коэффициент гораздо меньше и равен приблизительно $0.072\,м^2сек^{-2}$.

Решение уравнения получено при следующих начальных условиях: $t = 0: \quad r = r_0 = const, \quad dr/dt = 0.$ В отличие от случая плоского течения, уравнение нельзя решить аналитически даже при постоянных коэффициентах. На Фиг. 1 представлены его численные решения для указанных случаев.



Фиг. 1. Продвижение фронта пропитки с временем: 1 – при перепаде давления, 2 – без перепада давления

Видно, что при первоначальном впрыскивании воды с постоянным перепадом давления (кривая 1), фронт движения жидкости продвигается сравнительно быстро, а в процессе капиллярной пропитки (кривая 2) – гораздо медленнее.

Показано, что для больших времен радиус цилиндрической области пропорционален квадратному корню от времени: $r \approx \sqrt{(3R/Q)t}$, а занимаемая жидкостью площадь πr^2 растет линейно с временем. Такой параболический закон движения фронта пропитки характерен для процессов диффузионного распространения вещества, переноса влаги и т.п.

Рассмотренные режимы движения воды в ячейке Хеле-Шоу можно реализовать в пористой среде, как в наземных условиях, так и в условиях микрогравитации.

3. Моделирование растворения и извлечения вещества из пористых гранул

В случаях, когда растворяется тонкий фильм, это не порождает существенных изменений объема порового пространства. Благодаря указанному обстоятельству, раствор в порах как целое остается в покое и единственный переносный механизм, выносящий вещество из частицы - диффузия [9]. Наоборот, когда при растворении освобождается существенная часть порового пространства, это может породить компенсационный поток раствора как целое. При этом, в зависимости от отношения плотностей растворяемого вещества в твердом состоянии и полученного раствора, этот поток может быть направлен как вовнутрь частицы к месту растворения, так и от этого места наружу к границе гранулы. По этой причине, теперь перенос имеет более сложный характер – конвективная диффузия [11].

Таким образом, чисто диффузионным или конвективно-диффузионным путем соответствующий целевой компонент раствора достигает границу гранулы и переходит в жидкую среду, окружающую частицы. Так поливная вода превращается в раствор целевых компонентов, и они становятся доступными для корней растений.

Нами построены математические модели растворения солей, содержащихся в гранулах, и их переноса до пространства между частицами в обоих указанных случаях.

3.1. Модель диффузионного извлечения целевого компонента из сферической пористой частицы [12]

Эта модель соответствует случаю, когда целевой компонент расположен на стенках пор отдельных гранул субстрата в виде тонкого твердого слоя. Основным механизмом переноса в внутрипоровом пространстве является концентрационная диффузия. Считаем, что отдельные растворенные вещества не взаимодействуют химически между собой. Это дает возможность любой целевой компонент рассматривать сам по себе независимо от присутствия остальных. Его концентрация (масса в единице объема раствора) обозначаем через c. Принимается, что сферически симметрическая форма частицы хорошо аппроксимирует ее геометрию. Тогда, в пределах сферической частицы радиуса R, концентрация является функцией только времени t и радиальной координаты r: $c = c(r,t)$. Концентрация любого такого компонента в окружающей частицы среде $c_e(t)$ является переменной и неизвестной. Поэтому она играет роль функционального параметра в решении. Равновесный характер растворения твердого фильма дает возможность исключить из рассмотрения объемную массовую концентрацию твердого компонента в пористой среде. Таким образом получается одномерная нестационарная диффузионная краевая задача только для концентрации целевого компонента в поровом растворе $c(r,t)$ с граничным условием третьего рода на границе частицы $r = R:\ -D\dfrac{\partial c}{\partial r} = \alpha\,(c - c_e(t))$. В рассматриваемом случае активную пористость гранулы m и коэффициент диффузии в поровом пространстве (коэффициент дисперсии) D, как и коэффициент массообмена α, можно принять независящими от времени и от координаты. Это дает возможность применить к сформулированной задаче преобразование Лапласа. На основе решения трансформированной задачи определяется образ плотности потока вещества, покидающего гранулу и поступающего в окружающий раствор $j_R(t) \equiv -D\left.\dfrac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=R}$. В конечном итоге, обращение полученного выражения приводит к замкнутой аналитической формуле для искомой плотности в зависимости от всех параметров системы:

(2) $$j_R(t) = \alpha\left(\left(c_i(t) - c_e(t)\right) - \int_0^t \left(c_i(\tau) - c_e(\tau)\right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-\tau)}\,\frac{df_2^*(t-\tau)}{dt}\,d\tau\right).$$

Здесь функция $c_i(t) \equiv c_* + \left(c_0 - c_*\right) e^{-\frac{\gamma}{m}t}$ (определяемая через пористость m, начальную концентрацию c_0, параметры равновесного растворения – равновесную концентрацию c_* и параметр скорости растворения γ) имеет смысл эффективной внутрипоровой концентрации раствора. Функция интегрального ядра,

(3) $$f_2^*(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi\, e^{-\frac{D\mu_n^2}{R^2 m}t}}{Bi\left(Bi-1\right) + \mu_n^2},$$

выражается бесконечным рядом по характеристическим числам μ_n, которые являются корнями уравнения $tg\mu = -\dfrac{1}{Bi-1}\mu$, где *число Био* $Bi \equiv \alpha R / D$ – безразмерный коэффициент массообмена. Этот ряд быстро сходится при больших временах. Для малых t, нами получено другое асимптотическое выражение, которое здесь не приводится.

Очевидно, разность $\left(c_i(t) - c_e(t)\right)$ играет роль “движущей силы” процесса извлечения рассматриваемого компонента из частицы. Плотность потока вещества все время подстраивается под изменяющиеся условия во внешней среде, определяемые функцией $c_e(t)$. При этом, как показывает исследование полученного представления, наиболее сильно поток зависит от актуальных условий и все слабее от более удаленных в прошлом условий.

3.2. Модель извлечения целевого компонента из хорошо заполненных пор сферической пористой частицы [13]

В этом случае извлекаемое твердое вещество занимает существенную часть объема пористого тела – его объемная доля m_s. Объемная доля свободных пустот (активная пористость) – m_p. Считаем, что растворение твердого компонента происходит скачком на т.н. *фронте растворения* – подвижная сферическая поверхность, которая отделяет ядро частицы, в котором сохраняется начальное состояние, от внешней области, где активная пористость стала уже $m_s + m_p$. Поры этой области заполнены раствором. Рассмотрение целесообразно вести на основе модели бинарных смесей [14]. Согласно представлениям этой теории, в растворе выделяем два компонента – растворяемый целевой компонент A и растворитель B. Их массовые объемные концентрации в растворе соответственно c_A и c_B. Скачок пористости на фронте растворения порождает поток жидкости в поровом пространстве внешней области. Его фиктивная радиальная скорость через фронт (поток жидкости через единицу полной поверхности фронта), $v_{rf}(t) = m_s\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_*}\right)\frac{dr_f}{dt}$.

Она определена при предположении равновесного характера процесса растворения на основе баланса массы раствора через скорость движения фронта dr_f / dt, массовую плотность целевого компонента в твердом состоянии ρ_s, равновесную массовую плотность раствора ρ_* и m_s. Ее знание дает возможность определить и истинную скорость (поток жидкости через единицу проходимой поверхности) в частице вне ядра – $v_r(r,t) = \frac{v_{rf}(t)\, r_f^2(t)}{(m_s + m_p) r^2}$, и вне самой частицы – $v_{re}(r,t) = \frac{v_{rf}(t)\, r_f^2(t)}{r^2}$.

Тем самым определены и уравнения конвективной диффузии компонента A в указанных областях (c_A и c_{Ae}- массовые объемные концентрации, D_{AB} и D_{ABe}- коэффициенты бинарной диффузии):

(4) $$\frac{\partial c_A}{\partial t} + \frac{r_f^2(t)\, v_{rf}(t)}{m_s + m_p}\frac{1}{r^2}\frac{\partial c_A}{\partial r} = \frac{D_{AB}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c_A}{\partial r}\right) \qquad \left(r_f(t) < r < R\right),$$

(5) $$\frac{\partial c_{Ae}}{\partial t} + \frac{r_f^2(t)\, v_{rf}(t)}{r^2}\frac{\partial c_{Ae}}{\partial r} = \frac{D_{ABe}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c_{Ae}}{\partial r}\right) \qquad \left(r > R\right).$$

Равновесный характер растворения на фронте $r = r_f(t)$ приводит к условию $c_A = c_{A*} = const$, где c_{A*} – равновесная концентрация целевого компонента в растворе. Положение фронта определяется из дополнительного условия, следующего из баланса массы этого компонента A (условие Стефана):

(6) $$\frac{dr_f}{dt} = \frac{m_s + m_p}{m_s}\frac{D_{AB}}{\rho_s\left(1 - \frac{c_{A*}}{\rho_*}\right)}\frac{\partial c_A}{\partial r}.$$

На границе частицы имеется непрерывность концентраций и потоков вещества, а в среде далеко от частицы – достаточно быстрое затухание вносимых ею возмущений. Система перечисленных уравнений и условий не линейна, несмотря на постоянство всех параметров. Причина этому – присутствие подвижного фронта растворения, положение которого тоже подлежит определению как часть решения задачи. Методом интегральных балансов задача сведена к приближенному определению трех функций: положения фронта $r_f(t)$, концентрации компонента A на границе гранулы $c_R(t)$ и плотности его диффузионного потока, покидающего частицы $n_R^{diff}(t)$. Аналитические выражения, дающие эти функции через параметры задачи, из-за ограниченного места здесь не приводятся. Наличие представлений для $c_R(t)$ и $n_R^{diff}(t)$ дает возможность определить и полный поток целевого компонента, извлекаемого из частицы.

4. Балансовая модель минерального питания в коренном модуле космической оранжереи [15]

Полученные формулы для потоков вещества, извлекаемого из гранул субстрата, использованы нами при построении модели минерального питания растений, выращиваемых в космической оранжереи. Модель рассматривает коренной модуль как систему с сосредоточенными параметрами. Она состоит из баланса поливной воды и балансов минеральных солей. Учитывается периодическое поступление воды при поливе и ее потребление корнями растений в соответствии с периодом вегетации. Источником минеральных солей являются гранулы субстрата. Их количество, поступающее в межгранулное пространство, определяется в зависимости от концентрации там при помощи описанных формул для потоков. Сток вещества в этих балансах – потребление минерального раствора корнями. Модель дает возможность проигрывать различные варианты минерального питания в зависимости от режима полива и обеспечения солями.

Литература

1. Иванова Т., Стоянов В., Оранжерия над небето, София, Изд. къща BCT, 2002, 121 с.
2. Steinberg S. L., Daidzic N. E., Jones S., Or. D., Kluitenberg G., Reddi L., Alexander J. I., Tuller M., In: SAE Technical Paper series, 2002-01-2386 (Proc. 32nd Int. Conf. on Environmental Systems, CD-ROM).
3. Yendler B. S., Webbon B., Podolski I., Bula R., J. Adv. Space Res., 1996, vol. 18, No. 4/5, pp. 233-237.
4. Sahimi M., Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock: From Classical Methods to Modern Approaches, Weinheim, VSH, 1995, 284 p.
5. Stefanov I., Slavtchev S., Proc. 9th Workshop on Transport Phenomena in Two-Phase Flow, Borovets'2004, August 27-Sept. 1, 2004, Borovets, pp. 151-158.
6. Slavtchev S., Gerdzhikova M., Preprint No. CLRS-84-03, Central Laboratory for Space Research, Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1984, pp. 1-23.
7. Веригин Н. Н., Шержуков Б. С., В кн.: Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967), Москва, Наука, 1969, с. 237-313.
8. Голубев В. С., Кричевец Г. Н., Динамика геотехнологических процессов, Москва, Недра, 1989, 120 с.
9. Аксельруд Г. А., Альтшулер М. А., Введение в капиллярно-химическую технологию, Москва, Химия, 1983, 263 с.
10. Slavtchev S., Alexandrov V., Axisymmetric capillary flow in Hele-Shaw cell, J. Theor. Appl. Mech., Sofia, 2005 (submitted).
11. Аксельруд Г. А., Теор. Осн. Хим. Технологии, 1984, т.18, № 5, с. 674-677.
12. Simeonov G., Diffusional extraction of substance from a spherical porous particle, Heat Mass Transfer, Springer, 2005 (submitted).
13. Simeonov G., Extraction of solid substance from well filled pores of a spherical porous particle (in preparation).
14. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е., Явления переноса, Москва, Химия,1974, 687 с.
15. Simeonov G., Balance model of the nutrients in the root module of a space greenhouse, 10th National Congress Theor. Appl. Mech., 13-16 Sept 2005, Varna (submitted).